Matemática

e suas Tecnologias

Matemática

Frente

1

Sumário:

Matemática

ATIVIDADES

41 e 42

C1 | H3

Milkos/iStockphoto.com

Permutações simples e arranjos

A prática da leitura em si é um grande exercício de análise combinatória. Somos capazes de ler textos porque possuímos o conhecimento das grafias das letras do alfabeto e dos fonemas indicados por arranjos compostos de consoantes e vogais. Conseguimos entender o texto lido a partir do conhecimento das palavras formadas nas sucessões das sílabas lidas e a partir do contexto determinado pela combinação das ideias indicadas por essas palavras. Ideias diferentes podem ser indicadas, em língua portuguesa, mudando-se a ordem dos elementos de um mesmo subconjunto de letras do alfabeto; por exemplo, com as letras A, O, R, S e T é possível escrever as palavras “astro”, “ostra”, “ratos”, “rasto”, “rotas”, “toras” e “tosar”.

Arranjos simples

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_p\}$ um conjunto com p elementos.

Chamamos de arranjo simples dos p elementos, tomados r a r ($1 \leq r \leq p$), qualquer sequência de r elementos distintos tomados de A.

Observe exercício resolvido a seguir.

Exercício resolvido

1 Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 6 e 8, podem-se formar x números ímpares, com três algarismos distintos cada um. Determine x.

Resolução:

Cada sequência é uma tripla ordenada (a, b, c), tal que $c \in \{1, 3\}$, $b \in \{1, 2, 3, 4, 6 \text{ e } 8\}$ e $a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, respeitando $a \neq b \neq c$. Assim, $4 \cdot 5 \cdot 2 = 40$ números.

Permutações

Permutar uma sequência consiste em mudar a ordem de seus elementos sem que se retire nem se acrescente nenhum elemento. São necessários no mínimo dois termos distintos para que seja possível identificar suas diferentes permutações, pois dois termos distintos A e B podem ser enfileirados de apenas duas formas: AB e BA.

Se um terceiro termo C for inserido nessas fileiras, ele poderá ocupar uma de três posições distintas em cada fileira: no começo, no meio ou no final da fila. Como há duas fileiras em que o termo C pode ser inserido, concluímos que três termos distintos A, B e C podem ser enfileirados de $3 \cdot 2 = 6$ formas diferentes:

AB → CAB ACB ABC
BA → CBA BCA BAC

Assim, se um quarto termo D for inserido nessas fileiras, ele poderá ocupar qualquer uma de quatro posições distintas em cada fileira: entre os dois primeiros termos, entre os dois últimos termos ou no final da fila. Então, como há seis fileiras em que o termo D pode ser inserido, concluímos que quatro termos distintos A, B, C e D podem ser enfileirados de 4 • 6 = 24 formas diferentes:

ABC → ΔABC AΔBC ABDC ABCΔ
ACB → ΔACB AΔCB ACDB ACBΔ
BAC → ΔBAC BΔAC BADC BACΔ
BCA → ΔBCA BΔCA BCΔA BCAΔ
CAB → ΔCAB CΔAB CAΔB CABΔ
CBA → ΔCBA CΔBA CBΔA CBAΔ

Cada uma das fileiras obtidas ordenando-se n termos diferentes um do outro caracteriza uma permutação simples desses termos. Indicamos por P_n o número de permutações simples de n termos diferentes um do outro e, assim, temos que:

$$P_n = n!$$

Anagramas

As palavras PORTA, PRATO, PARTO, TROPA, TRAPO e RAPTO têm as mesmas letras nas mesmas quantidades. Dizemos que todas elas são anagramas de uma delas, por exemplo, PORTA. Porém, deve ser observado que os anagramas de uma palavra não são necessariamente palavras com sentido (ou significado), ou seja, RTPOA também é um anagrama da palavra PORTA.

Como a palavra PORTA possui cinco letras diferentes entre si, podemos concluir que a quantidade de seus anagramas coincide com o número de permutações simples de cinco termos. Portanto, o número de anagramas da palavra PORTA é $P_5 = 5! = 120$.

Exercícios resolvidos

2 Quantas são as senhas de quatro dígitos distintos que podem ser formadas com os algarismos 6, 7, 8 e 9?

Resolução:

As senhas são obtidas da permutação dos quatro dígitos disponíveis. Assim, a quantidade de senhas é:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

3 Quantos anagramas da palavra TEORIA existem?

Resolução:

Como a palavra TEORIA possui 6 letras distintas, a quantidade de anagramas pode ser calculada da seguinte maneira:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

4 Quantos anagramas da palavra TEORIA terminam com a letra E?

Resolução:

Como a palavra TEORIA possui 6 letras distintas, mas já deixamos uma delas fixa na última posição, restam 5 letras para permutarmos. Assim, a quantidade de anagramas de TEORIA que terminam com E pode ser calculada deste modo:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Arranjos

Uma corrida de automóveis, como um grande prêmio de Fórmula 1, é disputada por 22 pilotos; assim, o total de possibilidades para o resultado final dessa corrida é 22!. Porém, se considerarmos apenas os três primeiros colocados, esse número se reduz a $22 \cdot 21 \cdot 20 = 9240$ possibilidades, que é o número de arranjos simples de três dos 22 pilotos e que indicamos por $A_{22,3}$.

Indicamos por $A_{n,p}$, com $n \geq p$, o número de arranjos simples de somente p dos n elementos disponíveis do conjunto:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-p+1)}_{p \text{ fatores}}$$

Quando estipulamos a quantidade p de elementos em cada arranjo feito com os n elementos de um conjunto dado, o princípio multiplicativo fica interrompido assim que o número de fatores atinge a quantidade p. Observe como expressar, usando a notação fatorial, o número de arranjos que pode ser feito usando exatamente três dos elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}:

$$A_{9,3}=\frac{9!}{6!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=9\cdot 8\cdot 7$$

Vale ressaltar também que a permutação simples é, na verdade, um caso particular do arranjo simples (o caso em que todos os elementos são utilizados no arranjo):

$$A_{n,n}=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=\frac{n!}{1}=n!=P_n$$

Arranjo com repetição

Chamamos de arranjo com repetição dos n elementos de um conjunto S, tomados r a r, toda sequência de r elementos tomados de S não necessariamente distintos. Esquematicamente, temos:

$$\underbrace{(\_\_,\_\_,\_\_,\dots,\_\_)}_{r\ \text{elementos}}$$

A quantidade de arranjos de n elementos, tomados r a r, pode ser calculada da seguinte maneira:

$$A_n^r=n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n=n^r$$

Exercícios resolvidos

5 Quantos números pares com três algarismos distintos podem ser formados utilizando-se os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 9?

Resolução:

Como queremos números pares, obrigatoriamente devemos ter o algarismo 2 na posição das unidades. Assim, entre os outros cinco algarismos disponíveis, devemos escolher apenas dois (um para a posição das dezenas e um para a das centenas), o que pode ser calculado da seguinte maneira:

$$A_{5,2}=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5!}{3!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1}=5\cdot 4=20$$

6 Uma urna contém apenas quatro bolas: uma vermelha, uma branca, uma azul e uma amarela. Uma bola será extraída da urna, sua cor será observada e ela será recolocada na urna. Em seguida, o processo será repetido. Quantas são as possíveis sequências das duas cores observadas?

Resolução:

Devemos escolher duas cores entre as quatro possíveis, podendo ser duas cores iguais. Assim, a quantidade procurada pode ser calculada da seguinte maneira:

$$A_4^2=4^2=16$$

Para PRATICAR

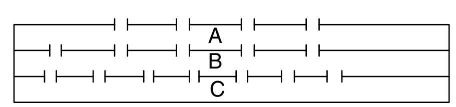
1 Mackenzie Os números pares com 4 algarismos distintos, que podemos obter com os elementos do conjunto {0, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, são em número de:

A 6^3
B 420
C $5\cdot 6^2$
D $5\cdot 4^3$
E 380

2 UFBA Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 6 e 8, podem-se formar x números ímpares, com três algarismos distintos cada um. Determine x.

3 Faap Em um hospital, existem três portas de entrada que dão para um amplo saguão, onde há cinco elevadores. Um visitante deve se dirigir ao sexto andar, utilizando um dos elevadores. De quantas formas diferentes poderá fazê-lo?

4 PUC-RS Um rato deve chegar ao compartimento C, passando antes, uma única vez, pelos compartimentos A e B.



Se há quatro portas de entrada, em A, cinco em B e sete em C, então o número de modos distintos de chegar a C é:

A 16
B 27
C 33
D 90
E 140

5 Mackenzie Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e seis vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão-restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes de montar a composição é:

A 120
B 320
C 500
D 600
E 720

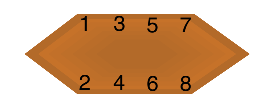
6 Mackenzie Em uma sala, há 8 cadeiras e 4 pessoas. O número de modos distintos das pessoas ocuparem as cadeiras é:

A 1680
B 8!
C $8\cdot 4!$
D $\frac{8!}{4}$
E 32

7 ITA Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupem posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupem posições adjacentes?

A 144
B 180
C 240
D 288
E 360

8 IME Seja um barco com 8 lugares, numerados como no diagrama. Há 8 remadores possíveis para guarnecê-lo, com as seguintes restrições: os remadores A e B só podem ocupar posições ímpares e o remador C, posição par. Os remadores D, E, F, G e H podem ocupar quaisquer posições. Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?



9 Fuvest 2011 Para a prova de um concurso vestibular, foram elaboradas 14 questões, sendo 7 de Português, 4 de Geografia e 3 de Matemática. Diferentes versões da prova poderão ser produzidas, permutando-se livremente essas 14 questões.

A Quantas versões distintas da prova poderão ser produzidas?
B A instituição responsável pelo vestibular definiu as versões classe A da prova como sendo aquelas que seguem o seguinte padrão: as sete primeiras questões são de Português, a última deve ser uma questão de Matemática e, ainda mais: duas questões de Matemática não podem aparecer em posições consecutivas. Quantas versões classe A distintas da prova poderão ser produzidas?

10 Fuvest Um lotação possui três bancos para passageiros, cada um com três lugares, e deve transportar os três membros da família Sousa, o casal Lúcia e Mauro e mais quatro pessoas. Além disso:
1. a família Sousa quer ocupar um mesmo banco;
2. Lúcia e Mauro querem sentar-se lado a lado.
Nessas condições, o número de maneiras distintas de dispor os nove passageiros no lotação é igual a:

A 928
B 1152
C 1828
D 2412
E 3456

11 Unicamp 2011 O perfil lipídico é um exame médico que avalia a dosagem dos quatro tipos principais de gorduras (lipídios) no sangue: colesterol total (CT), colesterol HDL (conhecido como "bom colesterol"), colesterol LDL (o "mau colesterol") e triglicérides (TG). Os valores desses quatro indicadores estão relacionados pela fórmula de Friedewald: CT = LDL + HDL + TG/5. A tabela a seguir mostra os valores normais dos lipídios sanguíneos para um adulto, segundo o laboratório SangueBom.

Indicador	Valores normais
CT	Até 200 mg/dL
LDL	Até 130 mg/dL
HDL	Entre 40 e 60 mg/dL
TG	Até 150 mg/dL

A O perfil lipídico de Pedro revelou que sua dosagem de colesterol total era igual a 198 mg/dL, e que a de triglicérides era igual a 130 mg/dL. Sabendo que todos os seus indicadores estavam normais, qual o intervalo possível para o seu nível de LDL?
B Acidentalmente, o laboratório SangueBom deixou de etiquetar as amostras de sangue de cinco pessoas. Determine de quantos modos diferentes seria possível relacionar essas amostras às pessoas, sem qualquer informação adicional. Na tentativa de evitar que todos os exames fossem refeitos, o laboratório analisou o tipo sanguíneo das amostras e detectou que três delas eram de sangue O+ e as duas restantes eram de sangue A+. Nesse caso, supondo que cada pessoa indicasse seu tipo sanguíneo, de quantas maneiras diferentes seria possível relacionar as amostras de sangue às pessoas?

12 UEPB 2012 A solução da equação $A_{n,3}=4\cdot A_{n,2}$ é:

C 3
D 4
E 8
F 6
G 5

13 Fuvest 2013 Vinte times de futebol disputam a série A do Campeonato Brasileiro, sendo seis deles paulistas. Cada time joga duas vezes contra cada um dos seus adversários. A porcentagem de jogos nos quais os dois oponentes são paulistas é:

A menor que 7%.
B maior que 7%, mas menor que 10%.
C maior que 10%, mas menor que 13%.
D maior que 13%, mas menor que 16%.
E maior que 16%.

14 **UFMG 2013** Permutando-se os algarismos do número 123456, formam-se números de seis algarismos. Supondo-se que todos os números formados com esses seis algarismos tenham sido colocados numa lista em ordem crescente:

A determine quantos números possui essa lista;
B determine a posição do primeiro número que começa com o algarismo 4;
C determine a posição do primeiro número que termina com o algarismo 2;

15 **EsPCEx 2015** Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 3, 5, 7, 9 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. A soma de todos os números assim formados é igual a:

D 1000000
E 1111100
F 6000000
G 6666000
H 6666600

16 **Unicamp 2015** O número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele há pelo menos três pessoas nascidas no mesmo dia da semana é igual a:

A 21
B 20
C 15
D 14

17 **PUC-SP 2015** No vestiário de uma academia de ginástica, há exatamente 30 armários, cada qual para uso individual. Se, no instante em que dois alunos dessa academia entram no vestiário para mudar suas roupas, apenas 8 dos armários estão desocupados, quantas opções eles terão para escolher seus respectivos armários?

A 14
B 28
C 48
D 56
E 112

18 **UPE 2015** A vendedora de roupas está arrumando os cabides da vitrine de uma loja. Ela deve pendurar 5 camisas, 3 bermudas e 2 casacos na vitrine, de modo que cada peça fique uma do lado da outra sem sobreposição.
Quantas são as disposições possíveis nessa arrumação, de modo que as peças de um mesmo tipo fiquem sempre juntas, lado a lado na vitrine?

A 30
B 120
C 1440
D 4320
E 8640

19 **Imed 2015** O total de anagramas da palavra LÓGICA é exatamente igual à medida, em graus, da soma dos ângulos internos de um polígono regular. Considerando que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada pela expressão $S = (n - 2) \cdot 180°$, onde n corresponde ao número de lados, pode-se afirmar que esse polígono é um:

A triângulo.
B quadrado.
C pentágono.
D hexágono.
E heptágono.

20 **Fac. Albert Einstein 2017** Oito adultos e um bebê irão tirar uma foto de família. Os adultos se sentarão em oito cadeiras, um adulto por cadeira, que estão dispostas lado a lado, e o bebê sentará no colo de um dos adultos. O número de maneiras distintas de dispor essas 9 pessoas para a foto é:

A $8 \cdot 8!$
B $9!$
C $9 \cdot 8!$
D 8^9

É assim no ENEM

As questões selecionadas nesta seção não são obrigatoriamente do Enem. Questões de vestibulares diversos que apresentam características semelhantes aos itens do Enem também foram usadas como recurso para estudo.

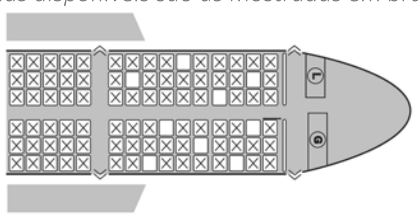
1 **Enem 2017** Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.
A opção que mais se adequa às condições da empresa é:

A I
B II
C III
D IV
E V

2 **Enem 2015** *Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.*



Disponível em: <www.gebh.net>. Acesso em: 30 out. 2013. (Adapt.)

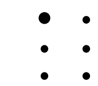
O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

A $\frac{9!}{2!}$
B $\frac{9!}{7! \times 2!}$
C $7!$
D $\frac{5!}{2!} \times 4!$
E $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

3 **Enem 2011** O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares. Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75913 é:

A 24
B 31
C 32
D 88
E 89

4 **Enem** A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.
Por exemplo, a letra A é representada por:



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é:

A 12
B 31
C 36
D 63
E 720

Questões EXTRAS

1 **FGV 2017** Somando todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4, o resultado será igual a:

A 2400
B 2444
C 6000
D 6600
E 6660

2 **UEG 2017** Uma comissão será composta pelo presidente, tesoureiro e secretário. Cinco candidatos se inscrevem para essa comissão, na qual o mais votado será o presidente, o segundo mais votado, o tesoureiro e o menos votado, o secretário.
Dessa forma, de quantas maneiras possíveis essa comissão poderá ser formada?

A 120
B 60
C 40
D 20
E 10

3 **EsPCEx 2017** Um grupo é formado por oito homens e cinco mulheres. Deseja-se dispor essas oito pessoas em uma fila, conforme a figura a seguir, de modo que as cinco mulheres ocupem sempre as posições 1, 2, 3, 4 e 5, e os homens, as posições 6, 7 e 8.

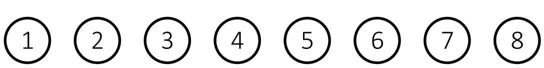


figura ilustrativa – fora de escala

Quantas formas possíveis de fila podem ser formadas obedecendo a essas restrições?

A 56
B 456
C 40320
D 72072
E 8648640

4 **FGV 2018** Uma senha é formada por oito caracteres, permutando-se os elementos do conjunto {a, b, c, d, e, 1, 3, 5}. Quantas senhas diferentes podem ser formadas de modo que na 2ª posição haja uma letra e na 6ª posição um algarismo?

A 40320
B 10800
C 720
D 4320
E 14400

5 **UEFS 2017** Uma estudante ainda tem dúvidas quanto aos quatro últimos dígitos do número do celular de seu novo colega, pois não anotou quando ele lhe informou. Apesar de saber quais são, não se lembra da ordem em que eles aparecem.
Nessas condições, pode-se afirmar que o número de possibilidades para a ordem desses quatro dígitos é:

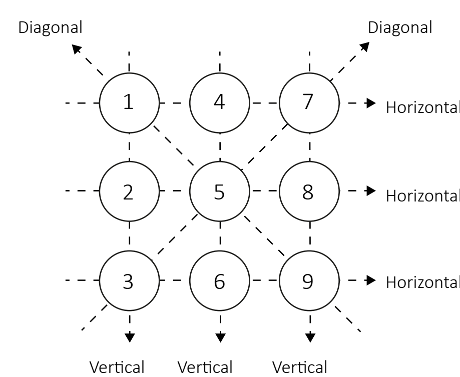
A 240
B 160
C 96
D 24
E 16

6 **Fuvest** Considere os números obtidos a partir de 12345 efetuando-se todas as permutações de seus algarismos. Colocando-se esses números em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43521?

7 **EsPCEx 2016** Da análise combinatória, pode-se afirmar que:

A o número de múltiplos inteiros e positivos de 11, formados por três algarismos, é igual a 80.
B a quantidade de números ímpares de quatro algarismos distintos que podemos formar com os dígitos 2, 3, 4, 5 e 6 é igual a 24.
C o número de anagramas da palavra ESPCEX que têm as vogais juntas é igual a 60.
D no cinema, um casal vai sentar-se em uma fileira com dez cadeiras, todas vazias. O número de maneiras em que poderão sentar-se em duas cadeiras vizinhas é igual a 90.
E a quantidade de funções injetoras definidas em A = {1, 3, 5} com valores em B = {2, 4, 6, 8} é igual a 24.

8 **Col. Naval 2015** Observe a figura a seguir:



Essa figura é formada por círculos numerados de 1 a 9. Seja “TROCA” a operação de pegar dois desses círculos e fazer com que um ocupe o lugar que era do outro. A quantidade mínima S de “TROCAS” que devem ser feitas para que a soma dos três valores de qualquer horizontal, vertical ou diagonal, seja a mesma, está no conjunto:

A {1, 2, 3}
B {4, 5, 6}
C {7, 8, 9}
D {10, 11, 12}
E {13, 14, 15}